

## 第六章 离散鞅论

- ① 公平游戏与鞅
  - 鞅的定义及性质
  - 鞅序列的例
  - 鞅基本定理
- ② 鞅序列的应用
  - 停时与有界停止定理
  - 鞅的经典应用例
- ③ 在金融中的应用
  - 基本概念
  - 衍生证券定价的第一基本定理
  - 期权的例



鞅的理论是现代随机分析中的重要工具.

所谓鞅, 即 martingale

(输了之后便将赌资加倍继续赌下去的赌博方法) 的中译.

注. 看后面的数学定义, 应该译成“公平游戏”更好一点.



引例. (直线上的随机游动) 设  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  是独立随机序列, 且

$$\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_n = -1) = q = 1 - p.$$

令

$$X_0 = x, \quad X_n = X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1,$$

称  $\{X_n, n \geq 0\}$  是从  $x$  出发的简单随机游动. 注意到,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n] &= X_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}] \\ &= X_n + (p - q) \begin{cases} > X_n, & p > q, \\ = X_n, & p = q, \\ < X_n, & p < q. \end{cases} \end{aligned}$$

#



## 信息流

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : 给定的概率空间,

$(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ :  $\mathcal{F}$  关于  $n$  递增的子  $\sigma$ -代数列, 亦称信息流.

### 适应过程

设  $Z = \{Z_n, n \geq 0\}$  是一个随机过程. 若对任何  $n$ ,  $Z_n$  关于  $\mathcal{F}_n$  可测, 则称过程  $Z$  关于  $(\mathcal{F}_n)$  是适应的.

记  $\mathcal{F}_n^0 := \sigma(Z_k, k \leq n)$ , 称为  $Z$  的自然流.

**注.** 一个过程关于它的自然流总是适应的.



## 鞅的定义

### 定义 6.1.1

1. 随机过程  $\{Z_n, n \geq 1\}$  称为鞅, 若对任意  $n$ ,  $\mathbb{E}|Z_n| < \infty$ , 且

$$\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n^0] = Z_n \quad (\text{或者等价地 } \mathbb{E}[Z_{n+1} - Z_n|\mathcal{F}_n^0] = 0.)$$

称  $\{Z_{n+1} - Z_n, n \geq 1\}$  为鞅差序列.

2. 若  $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n^0] \geq Z_n$ , 则称  $\{Z_n, n \geq 1\}$  称为下鞅.
3. 若  $\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n^0] \leq Z_n$ , 则称  $\{Z_n, n \geq 1\}$  称为上鞅.

注. 鞅的直观含义:

在给定的信息下, 对财富增量的预期是零.

所以鞅的期望是不变的.



见书中例 6.1.1.

注意, 鞅并不一定需要是独立随机变量的和.

例 6.1 赌硬币的正反面, 如下设计一种押法:

第一局押正面, 第二局开始总是押前一局出现的面.

那么

$$S_n := \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-1} \zeta_n, \quad n \geq 1$$

是鞅, 显然不是独立随机变量和.

#



## [回顾] 条件期望的性质

设  $\xi, \eta$  是可积的随机变量.

(1) 如果  $\xi$  是  $\mathcal{A}$  可测的, 且  $\eta$  和  $\xi\eta$  是可积的, 则

$$\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{A}) = \xi\mathbb{E}(\eta|\mathcal{A});$$

(2) 如果  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  都是  $\mathcal{F}$  的子  $\sigma$ -代数, 且  $\xi$  是可积的, 则

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}).$$

特别的,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}]] = \mathbb{E}[\xi].$$



## 升级版的定义

### 定义 6.1.2

设有流  $(\mathcal{G}_n)$ , (可积) 随机序列  $\{X_n : n \geq 0\}$  称为关于  $(\mathcal{G}_n)$  是鞅或者  $(\mathcal{G}_n)$  鞅, 如果

- (1)  $\{X_n\}$  适应于流  $(\mathcal{G}_n)$ ;
- (2) 对任何  $n$ , 有

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] = X_n.$$

(当不预先指定一个流时, 通常指随机序列的自然流而言.)

注. 事实上, 两个鞅的定义本质上没什么区别.



## 鞅的基本性质

- ① (同一个信息流下) 鞅的全体是线性空间.
- ② 鞅的期望与  $n$  无关, 下鞅的期望是  $n$  的递增序列.
- ③ (由 Jensen 不等式)
  - (i) 若  $X$  是鞅,  $\phi$  是凸函数且  $\phi(X)$  可积, 则  $\phi(X)$  是下鞅.  
比如,  $|X|$ ,  $X^2$ . 后者需要满足平方可积性.
  - (ii) 若  $X$  是下鞅,  $\phi$  是凸且递增的函数, 则  $\phi(X)$  也是下鞅.  
比如,  $X^+$ .



例 6.1.2 (Wald 鞅) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是前面引例中的简单随机游动,  $\{\xi_n\}$  是独立随机序列, 记自然流为

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\xi_k, k \leq n) = \sigma(X_k, k \leq n), n \geq 1.$$

对  $\lambda > 0$ , 令

$$Y_n := \lambda^{\xi_n}, n \geq 0.$$

故  $Y_n$  是  $\mathcal{B}_n$  可测的.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) &= \mathbb{E}(\lambda^{\xi_n + X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) = \lambda^{\xi_n} \cdot \mathbb{E}(\lambda^{X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) \\ &= Y_n \cdot (\lambda p + \frac{q}{\lambda}).\end{aligned}$$

因此  $\{\lambda^{\xi_n}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}, n \geq 0\}$  是鞅序列, 称为 Wald 鞅.  $\sharp$

注. 当  $p \neq q$  时, 取  $\lambda = \frac{q}{p}$ ,  $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = 1$ ,  $\{(\frac{q}{p})^{\xi_n}\}$  是鞅序列.



例 6.1.2 (Wald 鞅) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是前面引例中的简单随机游动,  $\{\xi_n\}$  是独立随机序列, 记自然流为

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\xi_k, k \leq n) = \sigma(X_k, k \leq n), n \geq 1.$$

对  $\lambda > 0$ , 令

$$Y_n := \lambda^{\xi_n}, n \geq 0.$$

故  $Y_n$  是  $\mathcal{B}_n$  可测的.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) &= \mathbb{E}(\lambda^{\xi_n+X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) = \lambda^{\xi_n} \cdot \mathbb{E}(\lambda^{X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) \\ &= Y_n \cdot (\lambda p + \frac{q}{\lambda}).\end{aligned}$$

因此  $\{\lambda^{\xi_n}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}, n \geq 0\}$  是鞅序列, 称为 Wald 鞅. #

注. 当  $p \neq q$  时, 取  $\lambda = \frac{q}{p}$ ,  $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = 1$ ,  $\{(\frac{q}{p})^{\xi_n}\}$  是鞅序列.



例 6.1.2 (Wald 鞅) 设  $\{X_n, n \geq 0\}$  是前面引例中的简单随机游动,  $\{\xi_n\}$  是独立随机序列, 记自然流为

$$\mathcal{B}_n = \sigma(\xi_k, k \leq n) = \sigma(X_k, k \leq n), n \geq 1.$$

对  $\lambda > 0$ , 令

$$Y_n := \lambda^{\xi_n}, n \geq 0.$$

故  $Y_n$  是  $\mathcal{B}_n$  可测的.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{B}_n) &= \mathbb{E}(\lambda^{\xi_n+X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) = \lambda^{\xi_n} \cdot \mathbb{E}(\lambda^{X_{n+1}}|\mathcal{B}_n) \\ &= Y_n \cdot (\lambda p + \frac{q}{\lambda}).\end{aligned}$$

因此  $\{\lambda^{\xi_n}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}, n \geq 0\}$  是鞅序列, 称为 Wald 鞅. #

注. 当  $p \neq q$  时, 取  $\lambda = \frac{q}{p}$ ,  $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = 1$ ,  $\{\left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_n}\}$  是鞅序列.



例 6.1.3 (Doob 鞅) 设  $\xi: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上可积随机变量,  $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ :  $\mathcal{F}$  的一个信息流. 令

$$\xi_n := \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_n), \quad n \geq 1,$$

那么  $\{\xi_n\}$  是关于  $(\mathcal{F}_n)$  的鞅, 称为 Doob 鞅. #

应用. 假设  $X$  是一个随机变量, 其值需要预测. 现有积累数据  $Y_1, Y_2, \dots$ , 那么在给定数据  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  时,

$X$  的使其均方误差最小的预测正是  $\mathbb{E}[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ ,

i.e.,  $X$  的最佳预测构成一个 Doob 鞅.



例 6.1.3 (Doob 鞅) 设  $\xi: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  上可积随机变量,  $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ :  $\mathcal{F}$  的一个信息流. 令

$$\xi_n := \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_n), \quad n \geq 1,$$

那么  $\{\xi_n\}$  是关于  $(\mathcal{F}_n)$  的鞅, 称为 Doob 鞅. #

应用. 假设  $X$  是一个随机变量, 其值需要预测. 现有积累数据  $Y_1, Y_2, \dots$ , 那么在给定数据  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  时,

$X$  的使其均方误差最小的预测正是  $\mathbb{E}[X | Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ ,

i.e.,  $X$  的最佳预测构成一个 Doob 鞅.



**例 6.2 (零均值鞅)** 任取一个随机序列  $\{X_n, n \geq 1\}$ ,  
(注意到,  $X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]$  的均值为 0,  $i \geq 1$ .)  
定义其部分和

$$\zeta_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]),$$

若对任意  $n \geq 1$  有  $\mathbb{E}|\zeta_n| < \infty$ , 则

$\{\zeta_n, n \geq 1\}$  是一个鞅, 称之为零均值鞅.

事实上, 由

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n],$$

有

$$\mathbb{E}[\zeta_{n+1} - \zeta_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n]] = 0.$$



**例 6.2 (零均值鞅)** 任取一个随机序列  $\{X_n, n \geq 1\}$ ,  
(注意到,  $X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]$  的均值为 0,  $i \geq 1$ .)  
定义其部分和

$$\zeta_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]),$$

若对任意  $n \geq 1$  有  $\mathbb{E}|\zeta_n| < \infty$ , 则

$\{\zeta_n, n \geq 1\}$  是一个鞅, 称之为零均值鞅.

事实上, 由

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n],$$

有

$$\mathbb{E}[\zeta_{n+1} - \zeta_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n]] = 0.$$



例 6.2 (零均值鞅) 任取一个随机序列  $\{X_n, n \geq 1\}$ ,  
(注意到,  $X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]$  的均值为 0,  $i \geq 1$ .)  
定义其部分和

$$\xi_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \dots, X_{i-1}]),$$

若对任意  $n \geq 1$  有  $\mathbb{E}|\xi_n| < \infty$ , 则

$\{\xi_n, n \geq 1\}$  是一个鞅, 称之为零均值鞅.

事实上, 由

$$\xi_{n+1} - \xi_n = X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n],$$

有

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1} - \xi_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} | X_1, \dots, X_n]] = 0.$$



## 离散形式的随机积分

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ : 概率空间,  $(\mathcal{F}_n : n \geq 0)$  是流.

### 可预料过程

随机序列  $\{H_n : n \geq 0\}$  称为是可预料的, 如果

1.  $H_0$  是  $\mathcal{F}_0$  可测的;
2. 对任何  $n \geq 1$ ,  $H_n$  是  $\mathcal{F}_{n-1}$  可测的.

设  $\{X_n\}$  是适应过程,  $\{H_n\}$  是可预料过程, 定义

$$Y_0 := H_0 X_0,$$

$$Y_n := Y_{n-1} + H_n(X_n - X_{n-1}), \quad n \geq 1.$$

称为过程  $H$  关于  $X$  的随机积分, 是一般随机积分的离散形式.



## 鞅的基本定理

### 定理 6.2.1 (Doob)

设  $X$  是一个适应过程,  $H$  是可预料有界过程.

- (1) 如果  $X$  是鞅, 那么过程  $\{Y_n, n \geq 0\}$  是鞅.
- (2) 如果  $X$  是下鞅且  $H$  非负, 那么  $\{Y_n, n \geq 0\}$  是下鞅.

证. 显然  $Y_n$  是可积的并且  $\mathcal{F}_n$  可测的, 且对  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}(H_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= H_n \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}),\end{aligned}$$

- (1) 如果  $X$  是鞅, 则右边是零, 即  $Y$  是鞅;
- (2) 如果  $X$  是下鞅且  $H$  非负, 则右边也非负, 即  $Y$  是下鞅.  $\square$



停时的概念, 是概率论中最重要的概念之一. 记  $I$  为正整数集.

### 定义 6.2.1 (停时)

称值域为  $I$  的随机变量  $T$  为(相对于流  $(\mathcal{F}_n : n \in I)$  的)停时, 如果

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in I.$$

例. 典型的停时 —— 首中时: 设  $A$  是 Borel 集, 定义

$$T := \inf\{n \in I : X_n \in A\},$$

则  $T$  是停时. 事实上,

$$\{T = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \cdots \cap \{X_0 \notin A\} \in \mathcal{F}_n.$$



停时的概念, 是概率论中最重要的概念之一. 记  $I$  为正整数集.

### 定义 6.2.1 (停时)

称值域为  $I$  的随机变量  $T$  为(相对于流  $(\mathcal{F}_n : n \in I)$  的)停时, 如果

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in I.$$

例. 典型的停时 —— 首中时: 设  $A$  是 Borel 集, 定义

$$T := \inf\{n \in I : X_n \in A\},$$

则  $T$  是停时. 事实上,

$$\{T = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \cdots \cap \{X_0 \notin A\} \in \mathcal{F}_n.$$

停时的概念, 是概率论中最重要的概念之一. 记  $I$  为正整数集.

### 定义 6.2.1 (停时)

称值域为  $I$  的随机变量  $T$  为(相对于流  $(\mathcal{F}_n : n \in I)$  的)停时, 如果

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in I.$$

例. 典型的停时 —— 首中时: 设  $A$  是 Borel 集, 定义

$$T := \inf\{n \in I : X_n \in A\},$$

则  $T$  是停时. 事实上,

$$\{T = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{X_{n-1} \notin A\} \cap \cdots \cap \{X_0 \notin A\} \in \mathcal{F}_n.$$

注意到,

1.  $\mathcal{F}_n$  关于  $n$  递增, 故  $T$  是停时等价于

$$\text{对任何 } n \in I, \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

2. 如果  $T$  与  $S$  是停时, 那么

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}.$$

命题.

如果  $T$  与  $S$  是停时, 那么  $T \wedge S$  与  $T \vee S$  也是停时.



停止过程: 设  $T$  是一个停时.

注. 对于随机序列  $\{X_n: n \in I\}$ , 自然地在集合  $\{T = n\}$  上定义  $X_T := X_n$ ,  $n \in I$ , 称为  $X$  在停时  $T$  处的位置.

定义  $T$ -停止序列

$X_n^T(\omega) := X_{n \wedge T}(\omega)$ ,  $n \geq 0$ , 称之为停止过程.

注. 1. 对任意  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} X_n^T &= \sum_{k=0}^{n-1} X_k 1_{\{T \geq k\}} + X_n 1_{\{T \geq n\}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} X_k (1_{\{T \geq k\}} - 1_{\{T \geq k+1\}}) + X_n 1_{\{T \geq n\}} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^n 1_{\{T \geq k\}} (X_k - X_{k-1}). \end{aligned}$$

2. 对任意  $k \geq 1$ ,  $\{T \geq k\} = \{T < k\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ .



## Doob 有界停止定理

## 定理 6.2.2

(1) 如果  $\{X_n : n \in I\}$  是鞅,  $T$  是停时, 那么

停止序列  $\{X_n^T : n \in I\}$  也是鞅.

进一步, 如果  $T$  是有界的, 那么  $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$ .

(2) 设  $X$  是下鞅,  $S, T$  是停时且  $S \leq T$ , 则  $\{X_n^T - X_n^S : n \in I\}$  是下鞅. 因此  $\mathbb{E}X_n^S \leq \mathbb{E}X_n^T$ .

证. 只需证明 (2).

由上面  $X_n^T$  的表达式, 结合条件  $S \leq T$  得

$$X_n^T - X_n^S = \sum_{k=1}^n 1_{\{T \geq k\} \setminus \{S \geq k\}} (X_k - X_{k-1}).$$

利用前面的定理, 即可推出结论.



停时一般都不会是有界的.

○ 研究什么情况下  $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$  成立是非常有意义的问题.

(首先举个例子说明, 结论一般是不对的.)

例 6.2.1 设  $\{X_n : n \geq 0\}$  是直线上 0 出发的对称随机游动, 是鞅.  
定义  $T$  是点 1 的首中时,

$$T := \inf\{n > 0 : X_n = 1\},$$

那么  $X_T = 1$ ,

$$\mathbb{E}X_T = 1 \neq 0 = \mathbb{E}X_0.$$

#



## Wald 等式

下面的定理说明在随机游动的场合,  $T$  的可积性能保证等式成立.

### 定理 6.2.3

设  $\{\xi_n : n \geq 1\}$  是可积独立同分布随机序列且  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ ,  $T$  是可积停时, 则

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^T \xi_n\right] = 0.$$



证. 定义  $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,  $n \geq 1$ , 是鞅. 由 Doob 停止定理,

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} = 0, \quad \forall n.$$

若  $T$  有界, 定理结论显然成立. 下面先证明当  $T$  可积时,  $X_T$  可积. 事实上,

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{T \wedge n} |\xi_i| \right) = \mathbb{E}(T \wedge n) \cdot \mathbb{E}|\xi_1|,$$

由单调收敛定理,

$$\mathbb{E}|X_T| \leq \mathbb{E} \sum_{i=1}^T |\xi_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(T \wedge n) \cdot \mathbb{E}|\xi_1| = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}|\xi_1| < \infty.$$



证. (续) 进一步地,

$$0 = \mathbb{E}(X_{T \wedge n}) = \mathbb{E}(X_T; T \leq n) + \mathbb{E}(X_n; T > n).$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 由控制收敛定理,

$$\text{右边第一项的极限} = \lim_n \mathbb{E}(X_T; T \leq n) = \mathbb{E}X_T.$$

另一方面,

$$\mathbb{E}(|X_n|; T > n) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^T |\xi_i|; T > n\right),$$

因为  $\sum_{i=1}^T |\xi_i|$  可积, 故再用控制收敛定理推出

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \mathbb{E}(|X_n|; T > n) \rightarrow 0.$$

从而有  $\mathbb{E}X_T = 0$ .

## 例 6.2.2

1. 讨论从 0 出发的简单随机游动  $\{X_n\}$  的常返性.  
任意取  $x > 0$ ,

$$Y_n = x^{X_n} (xp + x^{-1}q)^{-n}, n \geq 0$$

是一个鞅. 对正整数  $a$ , 令

$$\tau \equiv \tau_a := \inf\{n > 0 : X_n = a\},$$

则  $\{Y_{\tau_a \wedge n}\}$  也是鞅. 因此

$$\mathbb{E} \left[ x^{X_{\tau_a \wedge n}} (xp + x^{-1}q)^{-\tau_a \wedge n} \right] = \mathbb{E}[Y_0] = 1.$$

现在让  $n$  趋于无穷, 什么时候极限与期望可以交换呢?



## 注释

---

因为  $\tau \wedge n \leq \tau$ , 所以  $X_{\tau \wedge n} \leq a$ . 因此

- 当  $x \geq 1$  时,  $x^{X_{\tau \wedge n}} \leq x^a$ .

- 当  $xp + x^{-1}q \geq 1$  时,  $(xp + x^{-1}q)^{-\tau \wedge n} \leq 1$ .

也就是说, 当这两个条件都满足时,  $\{Y_n\}$  被常数控制.

什么时候两个条件都满足呢? 分两种情况:

(1)  $p \geq 1/2$ . 这时  $x > 1$  即保证两个条件满足.

(2)  $p < 1/2$ . 这时  $x > q/p$  才能保证两个条件满足.



(续) 把上面的关键恒等式

$$\mathbb{E} \left[ x^{X_{\tau_a \wedge n}} (xp + x^{-1}q)^{-\tau_a \wedge n} \right] = \mathbb{E}[Y_0] = 1$$

的左边分成两部分:  $\{\tau < \infty\}$  和  $\{\tau = \infty\}$ .

$$\begin{cases} \text{在第一部分上, } \lim_n X_{\tau \wedge n} = a, \\ \text{在第二部分上, } \lim_n (xp + x^{-1}q)^{-\tau \wedge n} = 0. \end{cases}$$

因此, 让  $n$  趋于无穷, 由控制收敛定理, 推出

$$x^a \mathbb{E} \left[ (xp + x^{-1}q)^{-\tau} \right] = 1.$$



- (1)  $p \geq 1/2$  (此时  $x > 1$  即保证两个条件满足):  
让  $x \downarrow 1$ , 那么

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1.$$

说明几乎所有轨道都会到达  $a$  点.

- (2)  $p < 1/2$  (此时  $x > q/p$  才能保证两个条件满足):  
让  $x \downarrow q/p$ , 那么

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = (p/q)^a < 1,$$

这说明只有一部分轨道会达到  $a$  点, 而且

$p$  越小或者  $a$  越远, 概率越小.

该结论与直观符合.



(续) 在  $p \geq 1/2$  时,  $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ . 还可写出  $\tau$  的母函数:  
令  $(xp + x^{-1}q)^{-1} = z$ , 即

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4zpq}}{2zp} > 1,$$

所以

$$\mathbb{E}[z^\tau] = \left( \frac{1 + \sqrt{1 - 4zpq}}{2zp} \right)^{-a} = \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4zpq}}{2zq} \right)^a.$$

▷ 写出随机变量的母函数和写出它的分布律在本质上是同样的. 比如, 可用母函数来算  $\tau$  的期望:

设  $a = 1$ , 两边对  $z$  求导, 然后让  $z \uparrow 1$ , 得

$$\mathbb{E}[\tau] = -\frac{1}{2q} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 4pq}} \right) = \frac{1}{2p - 1},$$

当  $p > 1/2$  时有限, 当  $p = 1/2$  时无穷.



2. 计算首次回到出发点的首次回归时  $\tau_0$  有限的概率

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty).$$

事实上, 由全概率公式

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau_0 < \infty) \\ &= p\mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_1 = 1) + q\mathbb{P}(\tau_0 < \infty | X_1 = -1) \\ &= 2(p \wedge q). \end{aligned}$$

只有对称时,  $\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1$ , 否则小于 1.

#



例 6.2.3 (输光问题) 考虑从原点出发的, 以  $\{0, N\}$  ( $N > 0$ ) 为吸收态

的简单随机游动  $\xi_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , 其中

$$X_1, X_2, \dots \text{独立同分布于 } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}.$$

令  $T := T_0 \wedge T_N$ : 游戏的持续时间. 首先由上例的结果,  
 $\forall x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq N$ ,  $\mathbb{P}^x(T_0 < \infty)$  与  $\mathbb{P}^x(T_N < \infty)$  至少有一个是 1, 故

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1.$$

显然  $\{T < \infty\} = \{T_0 < T_N\} \cup \{T_0 > T_N\}$ , 令

$$q_x := \mathbb{P}^x(T_0 < T_N)$$

表示从  $x$  出发到达 0 点在到达  $N$  点之前的概率.



1.  $p = q = \frac{1}{2}$  的场合:

考虑鞅  $\{\xi_n\}$ . 注意到  $\{\xi_{n \wedge T}\}$  也是鞅:  $\forall n \geq 0, 0 \leq \xi_{n \wedge T} \leq N$ ,

$$\mathbb{E}^\times[\xi_{n \wedge T}] = \mathbb{E}^\times \xi_0 = x,$$

而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\times[\xi_{n \wedge T}] &= \mathbb{E}^\times[\xi_{n \wedge T}; T \geq n] + \mathbb{E}^\times[\xi_{n \wedge T}; T < n] \\ &= \mathbb{E}^\times[\xi_n; T \geq n] + \mathbb{E}^\times[\xi_T; T < n].\end{aligned}$$

(注: 当  $n \geq T$  时,  $\xi_n \leq N$ , 从而  $\mathbb{E}^\times[\xi_n; T \geq n] \leq N\mathbb{P}^\times(T \geq n) \rightarrow 0$ .)

由单调收敛定理 (MCT),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\times[\xi_T; T < n] &\uparrow \mathbb{E}^\times[\xi_T; T < \infty] = \mathbb{E}^\times[\xi_T], \quad \text{而} \\ \mathbb{E}^\times[\xi_T] &= \mathbb{E}^\times[\xi_T; T_0 < T_N] + \mathbb{E}^\times[\xi_T; T_0 > T_N] = N\mathbb{P}^\times(T_0 > T_N),\end{aligned}$$

所以

$$q_x = 1 - \mathbb{P}^\times(T_0 > T_N) = 1 - \frac{x}{N} = \frac{N-x}{N}.$$



2.  $p \neq q$  的场合: 不妨设  $p > q$ .

$\{(\frac{q}{p})^{\xi_n}\}$  是一个有界鞅, 故  $\{(\frac{q}{p})^{\xi_{n \wedge T}}\}$  也是. 类似的由 MCT, 有

$$(\frac{q}{p})^x = \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_{n \wedge T}}] = \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_n}; n \leq T] + \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_T}; n > T],$$

而且  $\mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_n}; n \leq T] \leq \mathbb{P}^x(n \leq T) \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_T}; n > T] \uparrow \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_T}] \\ &= \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_T}; T_0 < T_N] + \mathbb{E}^x[(\frac{q}{p})^{\xi_T}; T_0 > T_N] \\ &= q_x + (\frac{q}{p})^N \cdot \mathbb{P}^x(T_0 > T_N) = q_x(1 - (\frac{q}{p})^N) + (\frac{q}{p})^N, \end{aligned}$$

因此

$$q_x = \frac{(\frac{q}{p})^x - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}.$$



例 6.2.4 (持续时间) 计算持续时间  $T$  的母函数.

需要一个含有  $T$  的鞅. 对任何  $\lambda > 0$ , 考虑指数鞅

$$\{Y_n := \lambda^{\xi_n} (\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n}, n \geq 0\}.$$

当  $p \geq q$  时, 取  $\lambda \notin (\frac{q}{p}, 1)$ , 必有  $|\lambda p + \frac{q}{\lambda}| \geq 1$ . 利用其停止序列是鞅的性质,

$$\begin{aligned}\lambda^x &= \mathbb{E}^x[\lambda^{\xi_{n \wedge T}} (\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n \wedge T}] \\ &= \mathbb{E}^x[\lambda^{\xi_{n \wedge T}} (\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n \wedge T}; n \leq T] \\ &\quad + \mathbb{E}^x[\lambda^{\xi_{n \wedge T}} (\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n \wedge T}; n > T]\end{aligned}$$



## 第一项

$$\mathbb{E}^x[\lambda^{\xi_{n \wedge T}}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-n \wedge T}; n \leq T] \leq \lambda^N \mathbb{P}^x(n \leq T) \rightarrow 0,$$

有

$$\begin{aligned}\lambda^x &= \mathbb{E}^x[\lambda^{\xi_T}(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}] \\ &= \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 < T_N] + \lambda^N \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 > T_N].\end{aligned}$$

令  $\mu = \frac{q}{\lambda p}$ , 代入上式得

$$(\frac{q}{\mu p})^x = \mathbb{E}[(\mu p + \frac{q}{\mu})^{-T}; T_0 < T_N] + (\frac{q}{\mu p})^N \mathbb{E}[(\mu p + \frac{q}{\mu})^{-T}; T_0 > T_N],$$

将  $\mu$  换成  $\lambda$  得两个方程

$$\begin{cases} \lambda^x = \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 < T_N] + \lambda^N \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 > T_N], \\ (\frac{q}{\lambda p})^x = \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 < T_N] + (\frac{q}{\lambda p})^N \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 > T_N]. \end{cases}$$



解得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T} &= \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 < T_N] + \mathbb{E}^x[(\lambda p + \frac{q}{\lambda})^{-T}; T_0 > T_N] \\ &= \frac{\lambda^{x-N}(\frac{q}{p})^a - \lambda^x - \lambda^{N-x}(\frac{q}{p})^x + \lambda^{-x}(\frac{q}{p})^x}{(\frac{q}{p})^N \lambda^{-N} - \lambda^N}.\end{aligned}$$

取  $|t| \leq 1$ , 令  $\lambda p + \frac{q}{\lambda} = \frac{1}{t}$ , 那么  $\lambda$  有两个根

$$\lambda_1 := \lambda_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2pt}, \quad \lambda_2 := \lambda_2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2 pq}}{2pt}.$$

显然  $\lambda_1 = \frac{q}{\lambda_2 p}$ , 因此

$$\mathbb{E}^x t^T = \frac{\lambda_2(t)^x (\lambda_1(t)^N - 1) - \lambda_1(t)^x (\lambda_2(t)^N - 1)}{\lambda_1(t)^N - \lambda_2(t)^N}.$$



下面可用所得母函数计算  $T$  的数学期望:

$$D_x := \mathbb{E}^x T = \lim_{t \uparrow 1} \frac{1 - \mathbb{E}^x t^T}{1 - t}.$$

设  $p > q$ , 那么  $t \uparrow 1$  时,  $\lambda_1 \rightarrow 1$ ,  $\lambda_2 \rightarrow \frac{q}{p}$ , 且  $t = \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 p + q}$ , 因此

$$\begin{aligned} D_x &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{1 - \frac{\lambda_2^x (\lambda_1^N - 1) - \lambda_1^x (\lambda_2^N - 1)}{\lambda_1^N - \lambda_2^N}}{1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 p + q}} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{\lambda_1^x (\lambda_1^{N-x} - 1) + \lambda_2^N (\lambda_1^x - 1) + \lambda_2^x (1 - \lambda_1^N)}{(\lambda_1 p - q)(\lambda_1 - 1)(\lambda_1^N - \lambda_2^N)} (\lambda_1^2 p + q) \\ &= \frac{-(N-x) + x(\frac{q}{p})^N + N(\frac{q}{p})^x}{(p-q)(1 - (\frac{q}{p})^N)} \\ &= \frac{N}{p-q} \cdot \frac{1 - (\frac{q}{p})^x}{1 - (\frac{q}{p})^N} - \frac{x}{p-q}. \end{aligned}$$



若  $p = q$ , 则  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ , 用  $\lambda$  表示  $\lambda_2$  (或  $\lambda_1$ ), 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^x_t T &= \frac{\lambda^x(\lambda^{-N} - 1) - \lambda^{-x}(\lambda^N - 1)}{\lambda^{-N} - \lambda^N} \\ &= \frac{\lambda^x(1 - \lambda^N) - \lambda^{N-x}(\lambda^N - 1)}{1 - \lambda^{2N}} \\ &= \frac{\lambda^x + \lambda^{N-x}}{1 + \lambda^N}.\end{aligned}$$

而类似地, 持续时间的期望

$$\begin{aligned}D_x &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{1 - \frac{\lambda^x + \lambda^{N-x}}{1 + \lambda^N}}{1 - \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}} \\ &= \lim_{t \uparrow 1} \frac{(1 - \lambda^x)(1 - \lambda^{N-x})}{(1 - \lambda)^2} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^N} = x(N - x).\end{aligned}$$



## 金融市场

首先, 注意一个金融市场上有两种东西:

1. 风险证券: 其价格记为

$\{X_n : n \geq 0\}$ , 是个随机序列.

2. 可无风险存贷款的银行: 存贷款的收益由利率决定, 简单地假设存贷款利率是一样的, 都是  $r$ , 即

存款  $x$ , 下个时刻的价值是  $(1+r)x$ .

( $x > 0$  表示存款,  $x < 0$  表示贷款.)



## 衍生证券的属数学意义

---

通常, 期权是一个合约, 即

以某个敲定时刻  $N$  和某种敲定方式买卖证券的权利.

期权的价格  $V$  依赖于证券价格, 但在时刻  $N$  时是敲定的:

$V$  是  $X_1, \dots, X_N$  的函数, 即关于  $\sigma(X_1, \dots, X_N)$  可测.



## 投资策略

在时刻  $n$ , 投资者的财富为  $Y_n$ ,

策略: 买  $H_n$  份证券,

$$\begin{cases} H_n > 0 \text{ 表示买入,} \\ H_n < 0 \text{ 表示卖空 (借证券卖出),} \end{cases}$$

剩下的钱存入银行. 即, 其财富分配如下:

$$Y_n = H_n X_n + (Y_n - H_n X_n).$$

↪ 下个时刻, 他的财富变成

$$Y_{n+1} = H_n X_{n+1} + (1+r)(Y_n - H_n X_n).$$

其中,  $H_n X_{n+1}$  是风险部分,  $(1+r)(Y_n - H_n X_n)$  是存款部分.



注意, 货币是有时间价值的, 故引入符号

$$\tilde{Y}_n = (1+r)^{-n} Y_n, \quad \tilde{X}_n = (1+r)^{-n} X_n, \quad (\text{称为折现, 与利息相反的运算.})$$

分别称过程  $\{\tilde{Y}_n, n \geq 0\}$ ,  $\{\tilde{X}_n, n \geq 0\}$  为折现后的财富和证券价格过程.

上式变型得

$$\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n = H_n(\tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n).$$

(: 折现后的财富是策略关于折现后证券价格的随机积分.)



## 无套利市场

- 假设: 1. 市场是给定的, 即  $\{X_n\}$  和利率  $r$  是给定的.  
2.  $Y_0$  是常数, 表示初始财富 (也就是本钱).  
即  $\{Y_n\}$  是由初始财富  $Y_0$ , 以及策略  $\{H_n\}$  决定的.

### 定义 6.3.1: 有效市场/无套利市场

市场有套利是指存在一个策略  $\{H_n\}$  和一个时刻  $N$ , 使得

$$Y_0 = 0, \text{ 而 } Y_N \geq 0, \quad \mathbb{P}(Y_N > 0) > 0.$$

市场无套利就是不存在这样的策略, i.e., 对  $\forall \{H_n\}$ : 策略,  $\forall N$ : 时刻,

如果  $Y_0 = 0$  且  $Y_N \geq 0$ , 则必有  $Y_N = 0$  a.s..



注. 一个成熟的市场不可能存在套利机会.

数学上的表达需要提出“等价鞅测度”的概念.

例. (在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  可以有其它概率测度.)

如果  $\xi > 0$ , 且  $\mathbb{E}\xi = 1$ , 定义

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}[\xi 1_A], \quad A \in \mathcal{F},$$

那么  $\tilde{\mathbb{P}}$  也是概率测度. 显然这两个概率测度有相同的零概率事件, 即

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0. \text{ (此时称两个概率测度等价.)}$$

#

- 两个等价的概率测度会改变概率, 但不改变基本的随机特性, 不会把不可能变成可能, 也不会把可能变成不可能.

鞅的定义中概率测度是关键, 一个概率测度下的鞅在另一个测度下一般不是鞅.



## 第一基本定理

### 定理 6.3.1

市场有效当且仅当存在一个等价概率测度  $\tilde{\mathbb{P}}$ , 在这个测度下,

折现后的证券价格过程  $\{\tilde{X}_n, n \geq 0\}$  是鞅.

这个测度通常称为等价鞅测度.

推论. 由

$$\tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n = H_n(\tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n)$$

可知, 在测度  $\tilde{\mathbb{P}}$  下,  $\{\tilde{Y}_n, n \geq 0\}$  也是鞅, 所以

$$\tilde{\mathbb{E}}[Y_0] = (1+r)^{-N} \tilde{\mathbb{E}}[Y_N].$$



## 期权的例

- ① 敲定价格为  $K$  的欧式买入期权:

不能提前执行, 必须在到期日执行.

故其到期的价值是  $(X_N - K)^+$ , 在 0 时刻的价格是

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-N}(X_N - K)^+].$$

- ② 美式买入期权: 与欧式买入期权的区别是它可提前执行.  
若在一个停时  $\tau \leq N$  执行, 则它在  $N$  时刻的价值是

$$(1+r)^{N-\tau}(X_\tau - K)^+,$$

在 0 时刻的价格是

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}(X_\tau - K)^+].$$



下面证明：美式买入期权提前执行不如在最后到期日执行。

命题.

$$\tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-\tau}(X_{\tau}-K)^+] \leq \tilde{\mathbb{E}}[(1+r)^{-N}(X_N-K)^+],$$

证. 在等价测度  $\tilde{\mathbb{P}}$  下,  $\{\tilde{X}_n\}$  是鞅, 所以

$$(1+r)^{-n}(X_n-K)^+ = (\tilde{X}_n - (1+r)^{-n}K)^+,$$

而  $(1+r)^{-n}K$  递减, 故  $\{\tilde{X}_n - (1+r)^{-n}K\}$  是下鞅. 又由  $x \mapsto x^+$  是凸且递增的函数, 所以

$$\{(1+r)^{-n}(X_n-K)^+, n \geq 0\} \text{ 是下鞅.}$$

但是  $\tau \leq N$ , 由定理 6.2.2 (2) 命题得证. □

